

**BOCINA CÓNICA DE
PRUEBAS PARA EL
CRIOSTATO DE 22 GHz**

Informe Técnico del OAN nº 2001-1

Félix Tercero Martínez, José Antonio López Fernández,
Enrique García Muñoz*, José Antonio Abad Abad,
Pablo Caballero*

1. Introducción.

El objetivo de este informe técnico es la descripción de la bocina cónica construida en el CAY para la medida de ruido del receptor de 22 GHz. Es sabido que a estas frecuencias las bocinas empleadas en radioastronomía son cónicas corrugadas, debido principalmente a que producen un diagrama de iluminación gaussiano y simétrico. Se trata de bocinas complejas donde las dificultades de diseño y construcción se asocian a un alto coste. Es muy probable que la bocina empleada en nuestro receptor de 22 GHz sea corrugada. Pero ésta no podrá diseñarse hasta que el sistema óptico de la cabina de receptores quede completamente definido. Hasta entonces es útil la construcción de una bocina que nos permita las primeras medidas de ruido del receptor completo. En el caso de la bocina cónica, su facilidad de construcción (puede llevarse a cabo en nuestro taller) y la simplicidad de su análisis la convierte en una atractiva opción. Como desventajas destacan la asimetría en el diagrama de radiación y su alto nivel de polarización cruzada

En primer lugar describiremos el diseño de la bocina empleada, comprobando sus características en campo lejano. En segundo lugar investigaremos una descripción de la propagación de este tipo de bocinas usando técnicas cuasiópticas usando modos superiores (*BME Beam Mode Expansion*). Esto nos permite conocer el diagrama de radiación tanto en campo cercano como en campo lejano sumando los modos gaussianos que consideremos necesarios para nuestro grado de aproximación. Finalmente comprobaremos la bondad de los resultados de diseño y simulación con las medidas llevadas a cabo por la escuela del prototipo construido.

2. Bocina Cónica.

La bocina cónica es un ejemplo de bocina mono-modo. Este tipo de bocinas se estudian suponiendo que el único modo que se propaga en ellas es el modo dominante de la guía de ondas (TE_{11} para guía circular). Solo se le añade a esta descripción un factor de fase debido al ángulo que forman las paredes [1]. Esta aproximación no contempla la excitación de modos superiores que provoca cualquier discontinuidad. Esta aproximación se cumple razonablemente bien en bocinas con diámetros medios (mayores de 1.5λ). Para ángulos de abocinamiento mayores de 15° , la aproximación está limitada por la pérdida de energía en excitación de modos superiores (10% en modo TM_{11}). Una descripción más completa puede encontrarse en [1].

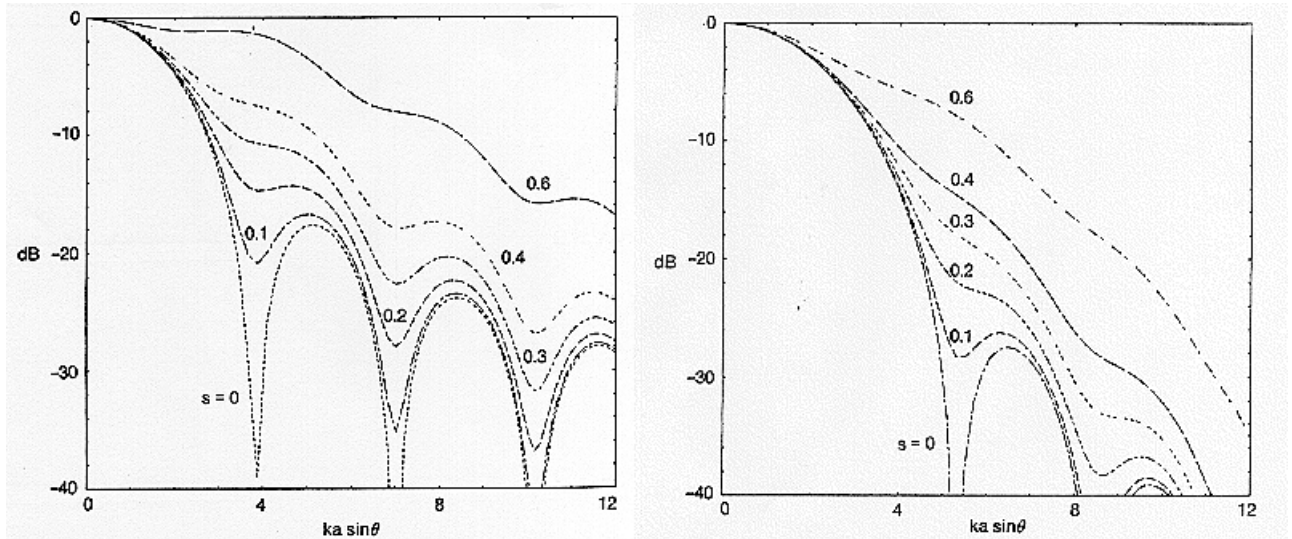
El campo de la componente copolarizada y de polarización cruzada en coordenadas cilíndricas es [2]:

$$E_{ax}(r, \varphi) = J_0(k_c r) + J_2(k_c r) \cos(2\varphi) e^{\frac{-ik_0 r^2}{2R_{cap}}} \quad (1)$$

$$E_{ay}(r, \varphi) = J_2(k_c r) \sin(2\varphi) e^{\frac{-ik_0 r^2}{2R_{cap}}} \quad (2)$$

$$k_c = \frac{1.8411}{a}$$

Donde a es el radio de la apertura, k_0 la constante de propagación en el aire y R_{cap} es el radio de curvatura en la apertura tomando como centro el vértice de la bocina. Comprobamos que el campo de esta bocina es asimétrico azimutalmente lo que provocara una iluminación no uniforme con distintos diagramas de radiación en el plano E y H. Las características del diagrama de radiación dependerán tanto del diámetro de la apertura como del factor de fase.

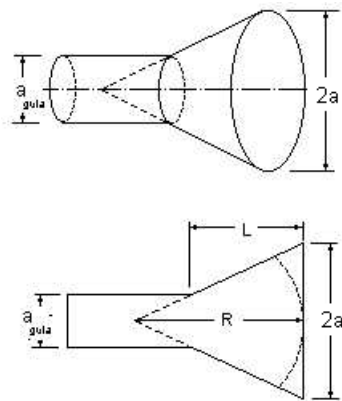


a) Plano E.

b) Plano H.

Figura 1: Diagramas de radiación en campo lejano de una bocina cónica, en función del error de fase en la apertura.

En nuestro diseño buscamos un factor de fase $s \approx 0.2$ para obtener unos niveles bajos de lóbulos secundarios. Ajustando las medidas de la bocina a las dimensiones del criostato, los datos sobre la bocina son los siguientes:



$$\begin{aligned}
 a &= 31 \text{ mm} \\
 L &= 166 \text{ mm} \\
 R_{cap} &= 196 \text{ mm} \\
 \theta_{horn} &= 8.9^\circ \text{ ángulo de abocinamiento} \\
 a_{guía} &= 4.7 \text{ mm}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Figura 2: Dimensiones de la bocina cónica.

Debido a la longitud de la bocina, se construyó en dos piezas con el torno de nuestro taller. La unión de ambas piezas se realizó empleando un molde en PVC que representaba la forma cónica interior de la bocina, ver Apéndice I.

Simulamos estas bocinas con SABOR [3] y observamos los cortes en campo lejano para los planos E y H.

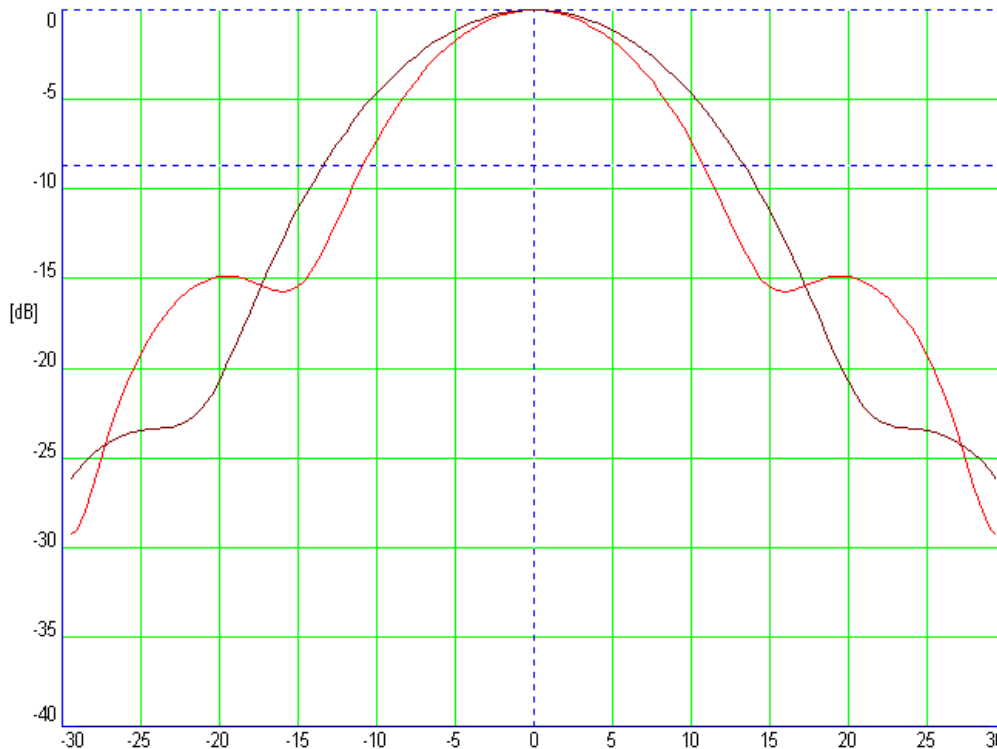


Figura 3: Diagrama de radiación en los planos E y H teóricos, obtenidos con SABOR.

Comprobamos que la bocina prediseñada tiene unos niveles de lóbulos secundarios aceptables y es compatible con las dimensiones del criostato. Elegimos este primer diseño para su construcción siguiendo los planos del Apéndice I.

3. Expansión en modos Gausianos.

3.1 Cálculo del campo en la apertura

Sabemos que es posible describir la propagación de haces que varíen suavemente en su dirección de propagación y que sean poco divergentes ($< 30^\circ$), por un conjunto de funciones ortogonales basadas en los polinomios de Laguerre [4]. La ventaja que presentan estas funciones es que podemos saber el valor del campo en cualquier punto próximo al eje de propagación de manera sencilla calculando $w(z)$, $R(z)$ y $\phi_0(z)$ e introduciéndolo en el modo correspondiente, Apéndice II.

Los modos indexados que satisfacen la ecuación de ondas en coordenadas cilíndricas son:

$$E_m^{p,\cos/\sin}(r,\varphi,z) = \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right)^{\frac{p}{2}} L_m^p \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left(\frac{-r^2}{w^2(z)} - ik_0 z - \frac{ik_0 r^2}{2R(z)} - i(2m+p+1)\phi_0(z) \right) \left\{ \frac{\cos(p\varphi)}{\sin(p\varphi)} \right\} \quad (4)$$

donde:

$$w(z) = w_0 \left(1 + \left(\frac{z + \Delta}{z_c} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$R(z) = z + \Delta + \frac{z_c^2}{z + \Delta} \quad (6)$$

$$\phi_0(z) = \text{atan} \left(\frac{z + \Delta}{z_c} \right) + \text{atan} \left(\frac{\Delta}{z_c} \right) \quad (7)$$

$$z_c = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (8)$$

El beam waist $w(-\Delta) = w_0$ está situado en $z = -\Delta$ (esto supone colocar nuestro origen $z=0$ en la apertura de la bocina). $w(z)$ es el waist o anchura del haz. $R(z)$ describe el radio de curvatura. $\phi_0(z)$ es el desplazamiento de fase del haz gaussiano. La distancia confocal z_c es un parámetro que limita en distancia el campo cercano del campo lejano. Todas estas ecuaciones, así como un análisis más detallado, pueden encontrarse en [2], [4] y [5].

Esta descripción queda completa en cuanto determinamos la posición y tamaño del beam waist, w_0 y Δ , en nuestra bocina. w_0 es, en principio, una constante arbitraria. Una elección adecuada, buscando que maximice la energía que transporta el modo fundamental hace que necesitemos menos modos para una descripción más exacta y podamos realizar siempre un primer análisis con el fundamental. En [2] lo calcula de

forma detallada obteniendo, para este tipo de bocinas, una relación entre la apertura y el waist en la apertura.

$$w(0) = 0.768a \quad (9)$$

Para determinar su posición imponemos que el campo en la apertura y nuestra aproximación gaussiana deben tener el mismo radio de curvatura en la apertura:

$$R(0) = R_{cap} \quad (10)$$

Con estos datos la posición y tamaño de beam waist pueden obtenerse con las siguientes expresiones:

$$\Delta = \frac{R_{cap}}{\left(1 + \left(\frac{\lambda R_{cap}}{\pi w^2(0)}\right)\right)} \quad z_c = \sqrt{(R_{cap} - \Delta)\Delta} \quad w_0 = \frac{w(0)}{\left(1 + \left(\frac{\Delta}{z_c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

Para nuestro diseño estas cantidades quedan:

$$\begin{aligned} w(0) &= 23.808 \text{ mm} \\ \Delta &= 60.256 \text{ mm} \\ z_c &= 90.44 \text{ mm} \\ w_0 &= w(-\Delta) = 19.813 \text{ mm} \end{aligned} \quad (12)$$

La descripción de un campo poco divergente puede realizarse como indica la ec.(13), solo necesitamos conocer en cada caso los coeficientes de peso que multiplican cada modo.

$$E_{ax}(r, \varphi, z) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{p,\cos} E_m^{p,\cos}(r, \varphi, z) + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{p,\text{sen}} E_m^{p,\text{sen}}(r, \varphi, z) \quad (13)$$

Para obtener los coeficientes, usamos la ventaja de conocer el campo en la apertura (en $z=0$ conocemos el campo dado por ec.(1)). En $z=0$ la ec.(13) toma el siguiente aspecto

$$E_{ax}(r, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{p,\cos} E_m^{p,\cos}(r, \varphi, 0) + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{p,\text{sen}} E_m^{p,\text{sen}}(r, \varphi, 0) \quad (14)$$

si multiplicamos a ambos lados por

$$E_n^{q,\cos}(r, \varphi, 0)^* \quad (15)$$

e integramos en el plano infinito que contiene la apertura, debido a la ortogonalidad de las funciones solo el modo $p=q$ y $m=n$ del tipo coseno da una integral distinta de cero, despejando dicho coeficiente tenemos

$$A_n^{q,\cos} = \frac{\iint_{Apertura} E_{ax}(r, \varphi, 0) E_n^{q,\cos}(r, \varphi, 0)^* dS}{\iint_{Plano \infty} |E_n^{q,\cos}(r, \varphi, 0)|^2 dS} \quad (16)$$

De forma similar, cambiando la ec.(15) por el modo del seno, obtendríamos los coeficientes tipo seno. Realizando alguna simplificación en las dependencias con φ , obtenemos expresiones más o menos sencillas para todos los coeficientes

$$A_n^{q,\text{sen}} = 0 \quad \forall q \quad (17)$$

$$A_n^{q,\cos} = 0 \quad \forall q \quad (\text{excepto } q = 0 \quad q = 2) \quad (18)$$

$$A_n^0 = \frac{\int_0^a J_0(k_c r) L_n^0 \left(\frac{2r^2}{w^2(0)} \right) \exp \left(\frac{-r^2}{w^2(0)} \right) r dr}{\int_0^\infty L_n^{0,2} \left(\frac{2r^2}{w^2(0)} \right) \exp \left(\frac{-2r^2}{w^2(0)} \right) r dr} \quad (19)$$

$$A_n^{2,\cos} = \frac{\int_0^a J_2(k_c r) L_n^2 \left(\frac{2r^2}{w^2(0)} \right) \exp \left(\frac{-r^2}{w^2(0)} \right) \left(\frac{2r^2}{w^2(0)} \right) r dr}{\int_0^\infty L_n^{2,2} \left(\frac{2r^2}{w^2(0)} \right) \exp \left(\frac{-2r^2}{w^2(0)} \right) \left(\frac{2r^2}{w^2(0)} \right)^2 r dr} \quad (20)$$

Comprobamos que los coeficientes $p=0$ se acoplan con la componente simétrica del campo en la apertura y los $p=2$ con la asimétrica (dependiente de φ).

Evaluando numéricamente ec.(19) y ec.(20):

Modos simétricos $p=0$

$$\begin{aligned} A_0^0 &= 1.184 & A_1^0 &= 0 & A_2^0 &= -0.199 & A_3^0 &= -0.099 & A_4^0 &= 0.018 & A_5^0 &= 0.074 \\ A_6^0 &= 0.071 & A_7^0 &= 0.036 & A_8^0 &= -0.005 & A_9^0 &= -0.034 & A_{10}^0 &= -0.045 \\ A_{11}^0 &= -0.041 & A_{12}^0 &= -0.026 & A_{13}^0 &= -0.007 & A_{14}^0 &= 0.011 & A_{15}^0 &= 0.024 \\ A_{16}^0 &= 0.031 & A_{17}^0 &= 0.030 & A_{18}^0 &= 0.024 & A_{19}^0 &= 0.014 & A_{20}^0 &= 0.003 \end{aligned} \quad (21)$$

Modos asimétricos $p=2$

$$\begin{aligned} A_0^{2,\cos} &= 0.199 & A_1^{2,\cos} &= 0.050 & A_2^{2,\cos} &= -0.006 & A_3^{2,\cos} &= -0.019 & A_4^{2,\cos} &= -0.014 \\ A_5^{2,\cos} &= -0.006 & A_6^{2,\cos} &= 0 & A_7^{2,\cos} &= 0.004 & A_8^{2,\cos} &= 0.005 & A_9^{2,\cos} &= 0.004 \\ A_{10}^{2,\cos} &= 0.002 & A_{11}^{2,\cos} &= 0 & A_{12}^{2,\cos} &= 0 & A_{13}^{2,\cos} &= -0.002 & A_{14}^{2,\cos} &= -0.002 \\ A_{15}^{2,\cos} &= -0.002 & A_{16}^{2,\cos} &= -0.001 \end{aligned} \quad (22)$$

Realizando un cambio de variables en ec.(19) y ec.(20), puede demostrarse que estos coeficientes solo dependen del cociente $w(0)/a$ [5]. Esto significa que una vez calculados podemos emplearlos en cualquier diseño que hagamos aunque cambiemos

las dimensiones de nuestra bocina. Los resultados (21) y (22) son universales para la bocina cónica.

El campo resultante es

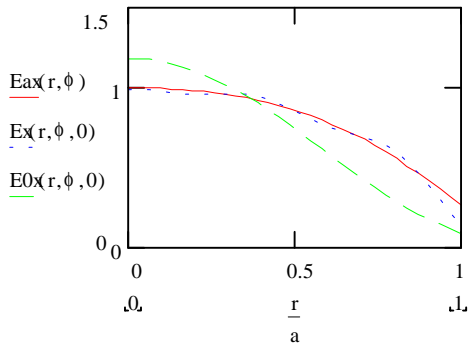
$$E_x(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{16} A_m^0 E_m^0(r, \varphi, z) + \sum_{m=0}^{20} A_m^{2,\cos} E_m^{2,\cos}(r, \varphi, z) \quad (23)$$

y como aproximación, el fundamental $p=0$ $m=0$

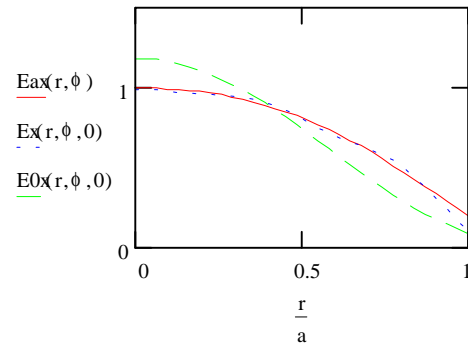
$$E0_x(r, \varphi, z) = A_0^0 E_0^0(r, \varphi, z) = A_0^0 \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-i\left(k_0 z + \frac{k_0 r^2}{2R(z)} + \phi_0(z)\right)\right) \quad (24)$$

Podemos comprobar como se ajustan estos campos al campo en la apertura que tenemos en nuestra bocina para distintos cortes en φ .

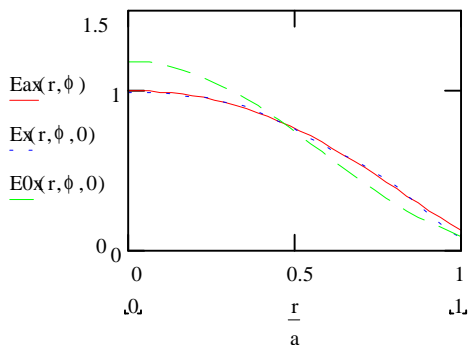
$\varphi = 0^\circ$



$\varphi = 30^\circ$



$\varphi = 45^\circ$



$\varphi = 90^\circ$

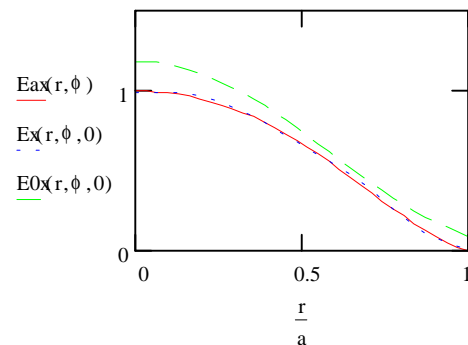


Figura 4: Comparación de la aproximación del modo fundamental y suma de modos con el campo en la apertura $z=0$ para distintos cortes φ

De la observación de las gráficas se extrae que la descripción que ofrece el modo fundamental en dispositivos asimétricos o que no tienen un campo parecido a una distribución gaussiana es insuficiente. No obstante, puede utilizarse como punto de partida de diseño y como criterio de exclusión. En todo caso, puede estimarse que si bien para una bocina corrugada, el criterio de truncamiento del haz gaussiano fundamental es $4W(z) \approx -35\text{dB}$, para una bocina cónica este criterio debería ser más exigente, del orden de $6W(z) \approx -30\text{dB}$.

3.2 Cálculo del diagrama de radiación en campo lejano.

El diagrama de radiación en el campo lejano nos permite comparar nuestra herramienta de modos gaussianos con otras existentes. SABOR es la que habitualmente empleamos para simulaciones de este tipo de dispositivos.

Solo es necesario efectuar un cambio de coordenadas cilíndricas a esféricas para representar nuestro diagrama de radiación. F es el radio sobre el cual proyectamos el diagrama ($F \gg z_c$). Este diagrama se obtiene calculando la distribución de energía normalizada que en este caso, conocido el campo, tan solo consiste en encontrar su módulo

$$P_n(\theta, \varphi) = 10 \log \left(\frac{|E(F \sin \theta, \varphi, F \cos \theta)|^2}{|E(0,0,F)|^2} \right) \quad (25)$$

Representamos los cortes de los planos E y H de la bocina con la superposición del modo fundamental. De nuevo el modo fundamental es una buena aproximación pero en este caso no tiene en cuenta unos lóbulos secundarios que aparecen a 15 dB. La descripción completa se aproxima bastante, para ángulos pequeños, a los resultados que da el SABOR para este tipo de bocinas (apartado 2).

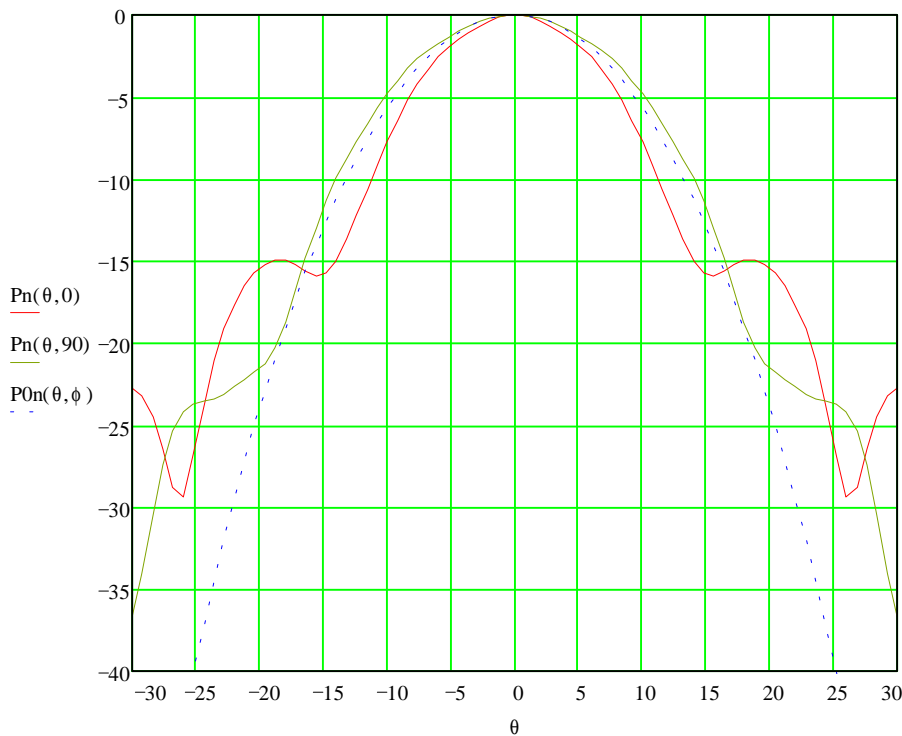


Figura 5: Diagrama de radiación en los planos E y H teóricos, obtenidos con BME. Comparación con el modo fundamental

3.3 Cálculo del diagrama de radiación en campo cercano.

Si calcular el diagrama de radiación sin necesidad de usar ninguna integral, supone una ventaja, saber el comportamiento en campo cercano con esta herramienta es el mayor logro de este método. De manera idéntica a como hemos realizado el calculo en el apartado anterior podemos ver la distribución de energía radiada sobre un plano perpendicular a la dirección de propagación, esto es, en coordenadas cilíndricas, **para cualquier z.**

$$P_n(r, \varphi, z) = 10 \log \left(\frac{|E(r, \varphi, z)|^2}{|E(0, \varphi, z)|^2} \right) \quad (26)$$

Como ejemplo proponemos el criostato del receptor de 22 GHz, en este diseño la ventana tiene un radio de 60 mm y esta colocada a 72.5 mm de la apertura de la bocina. Podemos ver la distribución de potencia que tenemos en la tapa para obtener información sobre el nivel de potencia al cual es truncado el haz.

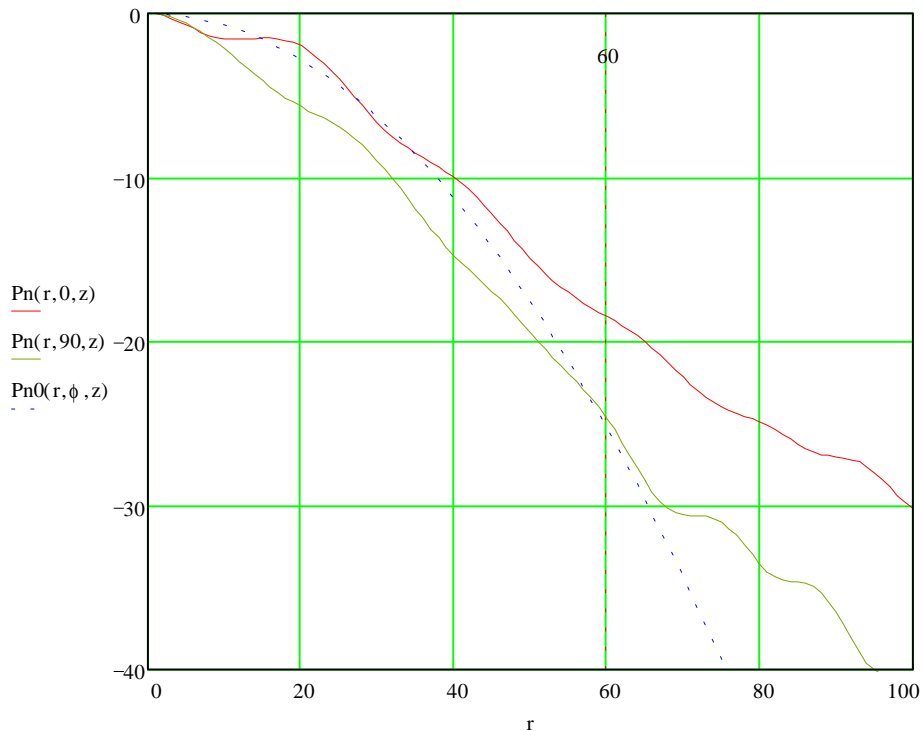


Figura 6: Diagrama de radiación en los planos E y H teóricos, en la tapa del criostato de 22 GHz

Vemos como el corte $\varphi = 0$ es truncado en la ventana a menos de 20 dB. El diagrama nada tiene que ver con el fundamental fuera de la ventana y no es raro pensar en efectos de truncamiento del haz y de aumento de temperatura de receptor en la calibración.

3.4 Estimación de pérdidas por truncamiento del haz.

Se puede estimar, de forma aproximada, la temperatura de antena que tenemos en la bocina en el momento de calibrar el receptor con la carga de LN₂. Usando el diagrama calculado en ec.(26) asignamos la temperatura de 77K a la ventana del criostato y una temperatura indeterminada (entre 300K de la carcasa del criostato y 70 de la etapa intermedia del receptor, podemos, como primera aproximación tomar la media 185K) para el resto del plano. Integrando sobre un plano infinito a $z_0=72.5$, en lugar de una esfera, tenemos

$$T_{antenna} = \frac{T_{LN_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{60} P_n(r, \varphi, z_0) r dr d\varphi + T_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} P_n(r, \varphi, z_0) r dr d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} P_n(r, \varphi, z_0) r dr d\varphi} = 79.84K \quad (27)$$

Midiendo la carga de nitrógeno tendremos una temperatura superior, 3K aproximadamente. Esto en el método de medida de ruido del factor Y significa un aumento de temperatura de ruido de receptor 1.5 veces el incremento de temperatura de carga fría.

$$\Delta T_{rec} = \left| \frac{Y}{Y-1} \right| \Delta T_{cold} \quad (28)$$

Para factores cercanos a 3, medidas preliminares del receptor, mediremos, solo por la bocina, 4.2K más de temperatura de ruido.

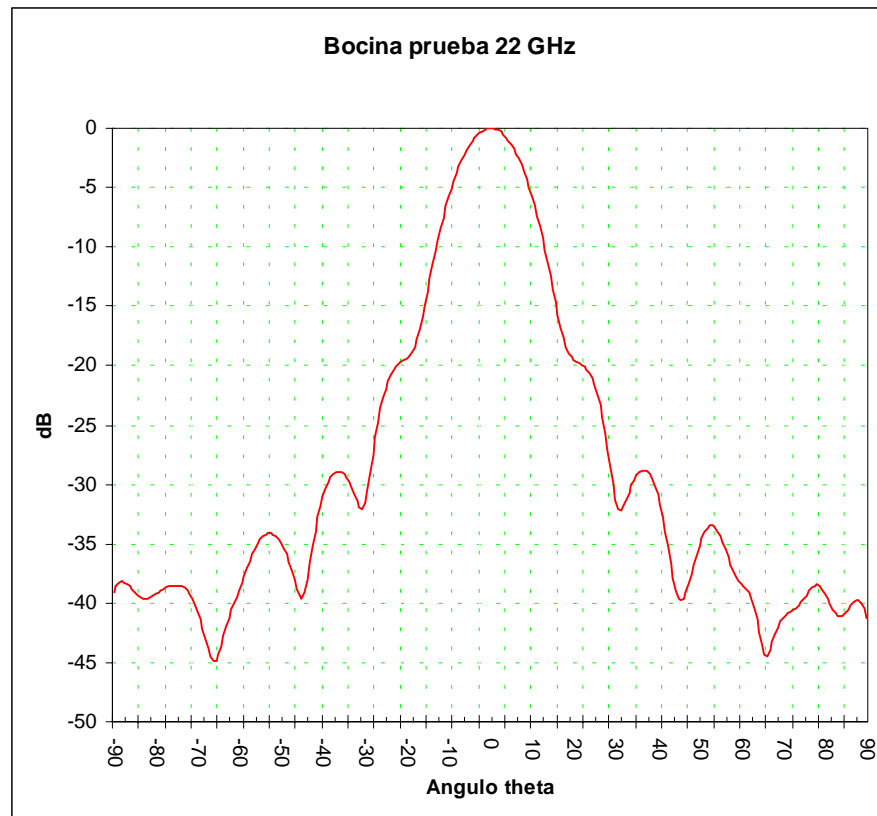
Para conseguir una medida más fidedigna de la temperatura de ruido durante las pruebas, se propone acercar la bocina a la ventana del criostato para minimizar las pérdidas. Se proponen dos límites, que serán complementados con las posibilidades mecánicas y de criogenia; acercar la apertura hasta la etapa intermedia y hasta la carcasa del receptor. Esto sitúa la apertura a unas distancias de la ventana de $z_0=57.5 \text{ mm}$ y $z_0=42.5 \text{ mm}$ respectivamente. Evaluando la ec.(27) en los nuevos planos obtenemos las siguientes temperaturas de antena.

$$T_{antenna}(z_0 = 57.5) = 78.72K$$

$$T_{antenna}(z_0 = 42.5) = 77.81K$$

4. Medidas de la bocina.

Las medidas, realizadas en la ETSIT, presentan un solo corte de la bocina cónica y un ancho de haz del orden del que obtenemos por el SABOR y por nuestra expansión en modos gaussianos.



En la siguiente tabla comparamos los parámetros más significativos de la medida con el SABOR y BME. Las simulaciones están tomadas a un corte $\phi=45^\circ$.

	B_w	$B_w (-8.7 \text{ dB})$	$P_{n2^\circ} (\text{dB})$	θ_2°
<i>Medida ETSIT</i>	14.75°	24.30°	-19.71	20.63°
<i>SABOR</i>	14.59°	24.08°	-18	20.5°
<i>BME</i>	14.30°	23.36°	-19	20°

Queda comprobada la correcta construcción de la bocina así como la precisión de las herramientas de simulación de las que disponemos.

5. Conclusión

Se ha construido una bocina en los talleres del CAY con éxito. Sin este elemento no podríamos haber probado el receptor en su totalidad. De forma paralela se ha desarrollado una herramienta que permite un estudio de este tipo de bocinas en campo cercano, complementando el uso de herramientas como el SABOR que nos permitían hacerlo en campo lejano. El conocimiento de lo que ocurre en campo cercano es muy interesante para nosotros para cubrir desde el diseño de ventanas en receptores hasta el diseño de elementos ópticos de la cabina.

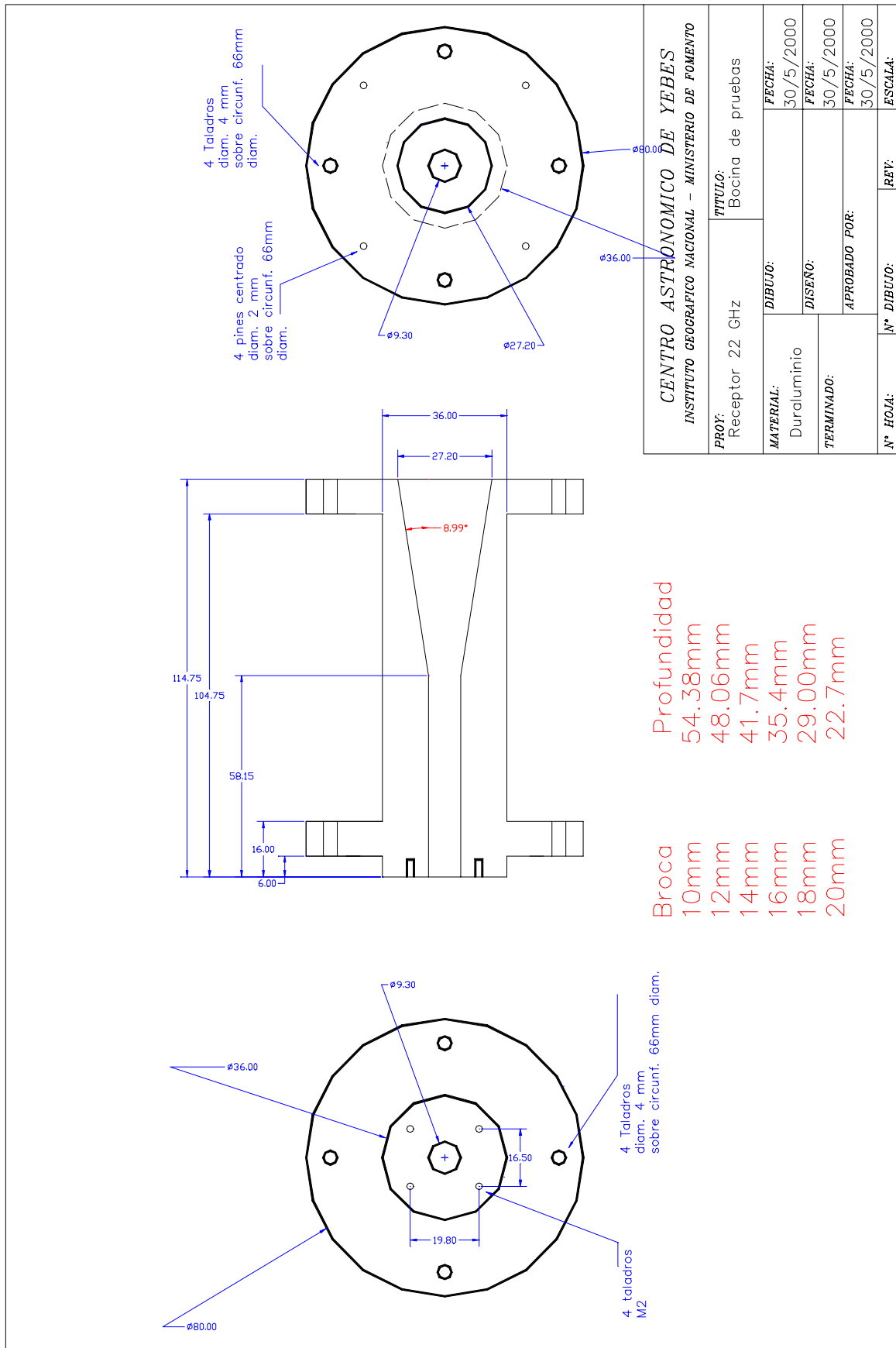
Concretando en el caso que nos ocupa se ha comprobado la validez del desarrollo en BME comparándolo con las medidas y la simulación dadas por SABOR. Hemos visto también como el comportamiento de la bocina en campo cercano empobrece las características de ruido medidas del receptor.

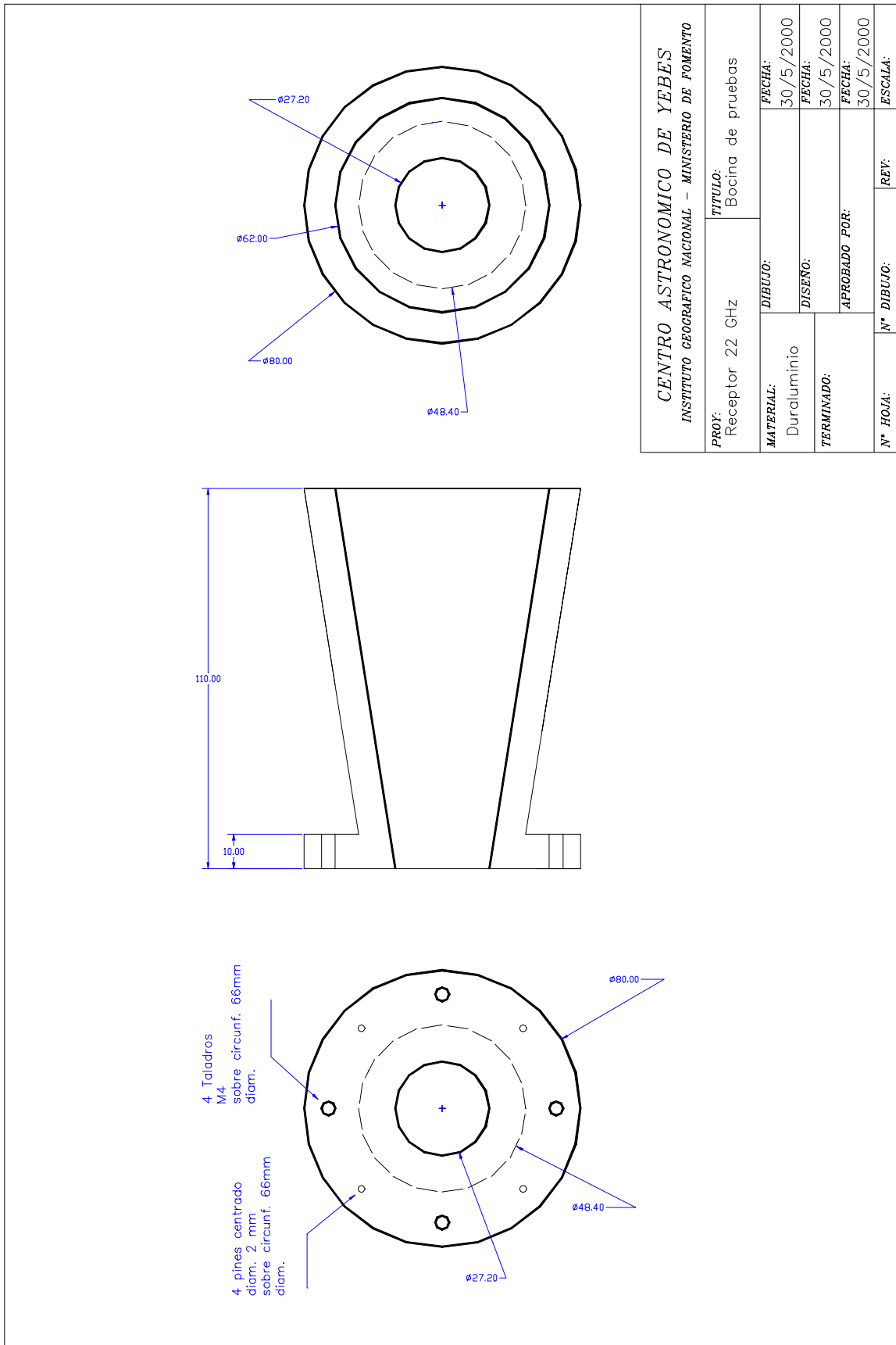
Con independencia de los resultados particulares aplicados a la bocina cónica, el empleo de esta técnica, conceptualmente sencilla, nos permite desde el CAY afrontarnos a una serie de problemas que hasta ahora eran de difícil acceso debido a la carencia de las herramientas de software necesarias.

6. Referencias

- [1] OLVER A.D. and CLARRICOATS P.J.B. "Microwave horns and feeds", IEE Electromagnetic Waves Series 39
- [2] MURPHY J.A. "Aperture Efficiencies of Large Axisymmetric Reflector Antennas Fed by Conical Horns" IEEE Trans. Antennas Propagat, vol 36, pp. 570-575, 1988
- [3] REY P.F.J and CAMPO R.M.A. "SABOR v1.1", ETSIT, Universidad Politécnica de Madrid
- [4] PAUL F. GOLDSMITH, "Quasioptical Systems", IEEE Press.
- [5] WYLDE R.J. "Millimetre-wave Gaussian beam-mode optics and corrugated feed horns", IEE Proceedings, vol 131, pp. 258-262, 1984

Apéndice I: Planos de la bocina cónica de pruebas





Apéndice II: Fichero MathCad

Conical feed horns

Introducción

La forma habitual de calcular el diagrama de difracción de una bocina pasa por calcular el campo en la apertura y hallar la transformada de Fourier que nos dara la distribución de campo en el campo lejano. Este procedimiento es conceptualmente sencillo, al fin y al cabo es una suma de campos en un punto lejano. Este procedimiento tiene dos problemas, es computacionalmente costoso y no permite conocer el nivel de potencia radiado a distancias no lejanas; por ejemplo en la tapa del criostato de nuestro receptor de 22 GHz. El primero tiene facil solución, software como el SABOR nos permite tener el diagrama de difracción de varias bocinas.

Para la segunda cuestion se desarrolla un metodo del calculo del campo radiado como aproximación a una suma de modos gaussianos. Estos modos tienen unos coeficientes de waist, radio de curvatura y fase de facil calculo algebraico e identicos para todos los modos. La unica dificultad consiste en encontrar el peso de cada modo en la suma de campo total y.... en no equivocarse al sumar.

Teniendo el campo en la apertura (que no es poco) para lograr nuestro objetivo tenemos que:

1. Buscar que modos acoplan a nuestro campo en la apertura
2. Buscar sus coeficientes de peso
3. Realizar la suma y obtener el patron.

De forma adicional se suele realizar un estudio de la bondad de la aproximación a modo fundamental gaussiano debido a su facilidad de manejo y propagación y cálculo de tappers.

Constantes fundamentales

$$f := 22 \cdot 10^9$$

$$c := 3 \cdot 10^{11}$$

$$\lambda := \frac{c}{f} \quad \lambda = 13.636$$

$$k_0 := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

$$i := \sqrt{-1}$$

Expresiones

$$\text{Laguerre}(m, p, x) := \sum_{i=0}^m \frac{(m+p)! \cdot (-x)^i}{(p+i)! \cdot (m-i)! \cdot i!}$$

Polinomio de Laguerre de modo m y orden p

$$\text{Laguerre00}(x) := 1$$

$$\text{Laguerre02}(x) := 1$$

$$\text{Laguerre10}(x) := 1 - x$$

$$\text{Laguerre12}(x) := 3 - x$$

$$J(n, x) := \sum_{m=0}^{20} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2-m}}{m! \cdot (n+m)!}$$

Función de Bessel de orden n (n>1). Está aproximada y es válida para argumentos pequeños.

Datos de la bocina

Todas las dimensiones están en mm y los ángulos en grados.

$a := 31$		Radio
$R_{cap} := 196$		Longitud axial desde el centro de fase a la apertura
$s := \frac{a^2}{2 \cdot \lambda \cdot R_{cap}}$	$s = 0.18$	Error de fase
$\theta_{boc} := \frac{180}{\pi} \cdot \text{atan} \left(\frac{a}{R_{cap}} \right)$	$\theta_{boc} = 8.988$	Angulo de abocinamiento

Campo en la apertura

$k_c := \frac{1.8411}{a}$ Constante del modo TE₁₁. Fundamental en la bocina conica

$$E_{ax}(r, \phi) := \left(J_0(k_c \cdot r) + J(2, k_c \cdot r) \cdot \cos \left(2 \cdot \phi \cdot \frac{\pi}{180} \right) \right) \cdot \exp \left(\frac{-i \cdot k_0 \cdot r^2}{2 \cdot R_{cap}} \right)$$

$$E_{ay}(r, \phi) := J(2, k_c \cdot r) \cdot \cos \left(2 \cdot \phi \cdot \frac{\pi}{180} \right) \cdot \exp \left(\frac{-i \cdot k_0 \cdot r^2}{2 \cdot R_{cap}} \right)$$

Podemos tomarlo como aproximación al campo copolarizado la componente x y al crosspolarizado la componente y.

Modos Gaussianos

Sabemos que el siguiente grupo de funciones ortogonales describen correctamente la propagación siempre que la variación del campo a lo largo de la dirección de propagación sea suave. Dichas funciones no normalizadas si presentan propiedades de ortogonalidad.

Los siguiente parametros son identicos para todos los modos. Tomamos coordenadas cilindricas con $z=0$ en la apertura de la bocina.

$w := 0.768 \cdot a$ Waist en la apertura $z=0$. En cuasioptica la elección de esta constante determina el porcentaje de energía que viaja en el modo fundamental. Matematicamente es una constante arbitraria pero se puede maximizar la energía en el fundamental lo cual resulta en una mejor descripción con menos modos. Veremos más adelante que para una aproximación azimutalmente simetrica $0.768 \cdot a$ es el valor óptimo.

$w = 23.808$

Si queremos tener en cuenta la asimetria que presenta esta bocina es mejor elegir $0.65 \cdot a$.

$$\Delta := \frac{R_{cap}}{\left[1 + \left(\frac{\lambda \cdot R_{cap}}{\pi \cdot w^2} \right)^2 \right]}$$

$$z_c := \sqrt{(R_{cap} - \Delta) \cdot \Delta}$$

$$w_0 := \frac{w}{\left[1 + \left(\frac{\Delta}{z_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Informe Técnico nº 2001-1. Bocina Cónica de pruebas para el criostato de 22 GHz

$\Delta = 60.256$	Distancia de la apertura al beam waist (w_0). [2]
$z_c = 90.44$	Distancia confocal. A partir de esta distancia de la apertura podemos considerar campo lejano.
$w_0 = 19.813$	Beam waist. Está en $z = -\Delta$

$$w(z) := w_0 \left[1 + \left[\frac{(z+\Delta)}{z_c} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Estas son las formulas que describen el comportamiento del waist, radio de curvatura y corrimiento de fase. Notad que estan desplazadas Δ ya que el origen esta en la apertura.

$$R(z) := (z+\Delta) \cdot \left[1 + \left[\frac{z_c}{(z+\Delta)} \right]^2 \right]$$

A ϕ_0 se le añade una constante que hace que en la apertura valga cero. Esto hace más facil el calculo de los coeficientes Amp

$$\phi_0(z) := \text{atan} \left[\frac{(z+\Delta)}{z_c} \right] - \text{atan} \left(\frac{\Delta}{z_c} \right)$$

$$E(m,p,r,\phi,z) := \left(\frac{2 \cdot r^2}{w(z)^2} \right)^{\frac{p}{2}} \cdot \text{Laguerre} \left(m,p, \frac{2 \cdot r^2}{w(z)^2} \right) \cdot \exp \left[-\frac{r^2}{w(z)^2} - i k_0 z - \frac{i \pi \cdot r^2}{\lambda \cdot R(z)} - i \cdot (2 \cdot m + p + 1) \cdot \phi_0(z) + i p \cdot \phi \right]$$

Estos modos son ortogonales, si integramos en todo el plano funciones de mismo orden y modo obtendremos una solución distinta de cero. En todos los demas casos tendremos cero como resultado.

Estos modos pueden descomponerse en $\sin(p \cdot \phi)$ y $\cos(p \cdot \phi)$. Hecho esto si realizamos las integrales para buscar el acoplamiento del campo en la apertura con los modos gaussianos,

Solo son distintas de cero los ordenes $p=0$ y $p=2$. Con $p=0$ la integral en phi da $2 \cdot \pi$ y con $p=2$ tenemos un factor $\cos(2\phi)^2$ cuya integral es distinta de cero. En los otros casos tenemos senos y coseno de numeros enteros que sobre toda la circunferencia integran cero.

Asi tenemos una expresión del campo que podemos escribir como suma de modos gaussianos,

$$Ax_0 := 0 \quad Ax_2 := 0$$

$$\begin{aligned} E_{\text{gaussian}_x}(r,\phi,z) := & \exp \left(-\frac{r^2}{w(z)^2} - i k_0 z - \frac{i \pi \cdot r^2}{\lambda \cdot R(z)} - i \phi_0(z) \right) \cdot \sum_{m=0}^0 Ax_0 \cdot \text{Laguerre} \left(m,0, \frac{2 \cdot r^2}{w(z)^2} \right) \cdot \exp \left(-2 \cdot m \cdot i \phi_0(z) \right) \dots \\ & + \exp \left(-\frac{r^2}{w(z)^2} - i k_0 z - \frac{i \pi \cdot r^2}{\lambda \cdot R(z)} - i \phi_0(z) \right) \cdot \sum_{m=0}^0 Ax_2 \cdot \text{Laguerre} \left(m,2, \frac{2 \cdot r^2}{w(z)^2} \right) \cdot \exp \left[- (2 \cdot m + 2) \cdot i \phi_0(z) \right] \cdot \left(\frac{2 \cdot r^2}{w(z)^2} \right) \cdot \cos(2 \cdot \phi) \end{aligned}$$

Vemos que los modos de orden $p=0$ son independientes de ϕ y que los $p=2$ lo hacen con $\cos(2\phi)$. podemos identificar entonces dos contribuciones. Una simetrica que veremos que lleva la mayor parte de energia y otra asimetrica. Si nos fijamos se corresponden con las contribuciones del campo en la apertura de la bocina J0 y J2.

Para calcular el acoplamiento de la suma de modos al campo en la apertura multiplicamos por el conjugado e integramos. Tenemos en cuenta que estamos en $z=0$ y que $\phi_0(0)=0$.

Modos simetricos p=0

Para los polinomios de orden p=0 simplificando la integral en phi que da 2π arriba y abajo, el coeficiente que da cuenta de la curvatura se elimina al igualar con el campo en la apertura. En el denominador tendremos la siguiente integral que en los polinomios de orden p=0 da el mismo resultado para todos los modos m.

$$\int_0^{20 \cdot a} \text{Laguerre} \left(0, 0, \frac{2 \cdot r^2}{w(0)^2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{2 \cdot r^2}{w(0)^2} \right) \cdot r \, dr = 141.705$$

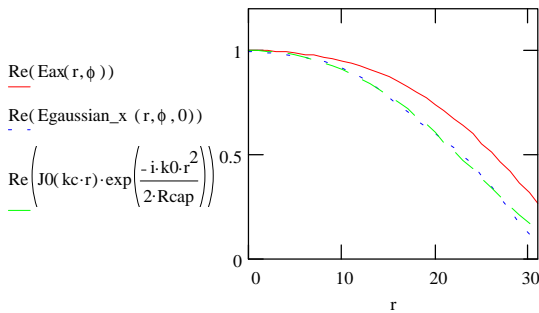
$$m := 0..20$$

$$Ax0_m := \frac{\int_0^a J_0(kc \cdot r) \cdot \text{Laguerre} \left(m, 0, \frac{2 \cdot r^2}{w(0)^2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{r^2}{w(0)^2} \right) \cdot r \, dr}{141.705}$$

En la integral del denominador 20*a es nuestro infinito numerico.

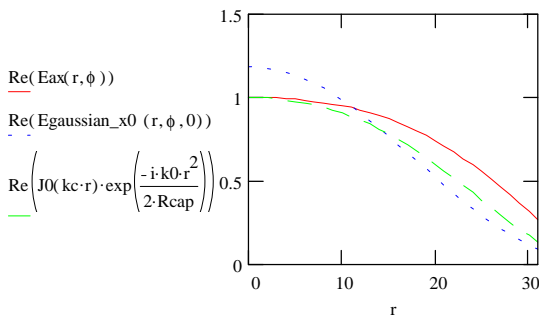
$$E_{\text{gaussian_x}}(r, \phi, z) := \exp \left(-\frac{r^2}{w(z)^2} - ik_0 z - \frac{i \cdot \pi \cdot r^2}{\lambda \cdot R(z)} - i \cdot \phi_0(z) \right) \cdot \left[\sum_{m=0}^{16} Ax0_m \cdot \text{Laguerre} \left(m, 0, \frac{2 \cdot r^2}{w(z)^2} \right) \cdot \exp(-2 \cdot m \cdot i \cdot \phi_0(z)) \right]$$

$r := 0, 1..a$ $\phi := 0$



Esto seria el ajuste de la componemte simetrica del campo en la apertura a partir de modos simetricos. Vemos que el campo total esta afectado de una dependencia en ϕ . Para $\phi=45$ podemos observad la bondad del ajuste. Comprobamos experimentalmente que sumando hasta el modo 16 ($m=16$ $p=0$) obtenemos los mejores resultados.

$$E_{\text{gaussian_x0}}(r, \phi, z) := \exp \left(-\frac{r^2}{w(z)^2} - ik_0 z - \frac{i \cdot \pi \cdot r^2}{\lambda \cdot R(z)} - i \cdot \phi_0(z) \right) \cdot \left[\sum_{m=0}^0 Ax0_m \cdot \text{Laguerre} \left(m, 0, \frac{2 \cdot r^2}{w(z)^2} \right) \cdot \exp(-2 \cdot m \cdot i \cdot \phi_0(z)) \right]$$



Esto seria el ajuste de la componemte simetrica fundamental modo $m=0$. El ajuste no parece muy bueno pero las ventajas de trabajar solo con el fundamental pueden hacer que merezca la pena. Aqui se nota, el proceso de integraci3n en el producto escalar.

Modos asimetricos p=2

Debemos multiplicar el sumatorio por un modo m generico de orden. Teniendo en cuenta que estamos en la apertura el desplazamiento de fase es cero, z=0 y el termino de fase esferico se anula con el del campo. Reordenando los terminos y despejando el coeficiente correspondiente y eliminando la integral en componente phi que es igual en denominador y numerador, tenemos;

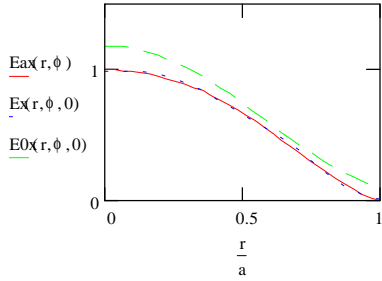
$$Ax2_m := \frac{\int_0^a J(2, kc \cdot r) \cdot \text{Laguerre}\left(m, 2, \frac{2 \cdot r^2}{w(0)^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{w(0)^2}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot r^2}{w(0)^2}\right) \cdot r \, dr}{\int_0^{20 \cdot a} \left[\text{Laguerre}\left(m, 2, \frac{2 \cdot r^2}{w(0)^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{w(0)^2}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot r^2}{w(0)^2}\right) \right]^2 \cdot r \, dr}$$

$$\begin{aligned} \text{Egaussian_x}(r, \phi, z) := & \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2} - i \cdot k_0 \cdot z - \frac{i \cdot \pi \cdot r^2}{\lambda \cdot R(z)} - i \cdot \phi \cdot \theta(z)\right) \cdot \sum_{m=0}^{16} Ax0_m \cdot \text{Laguerre}\left(m, 0, \frac{2 \cdot r^2}{w(z)^2}\right) \cdot \exp(-2 \cdot m \cdot i \cdot \phi \cdot \theta(z)) \dots \\ & + \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2} - i \cdot k_0 \cdot z - \frac{i \cdot \pi \cdot r^2}{\lambda \cdot R(z)} - i \cdot \phi \cdot \theta(z)\right) \cdot \left[\sum_{m=0}^{20} Ax2_m \cdot \text{Laguerre}\left(m, 2, \frac{2 \cdot r^2}{w(z)^2}\right) \cdot \exp[-(2 \cdot m + 2) \cdot i \cdot \phi \cdot \theta(z)] \cdot \left(\frac{2 \cdot r^2}{w(z)^2}\right) \cdot \cos\left(2 \cdot \phi \cdot \frac{\pi}{180}\right) \right] \end{aligned}$$

φ := 90

E_x(r, φ, z) := Egaussian_x(r, φ, z)

E₀(r, φ, z) := Egaussian_x0(r, φ, z)



Este ajuste incluyendo los modos asimetricos nos da un campo aceptable para todos los angulos. El mejor ajuste se produce en el corte φ=90

Diagrama de Radiación

F := 10000

Radio de la esfera donde vamos a ver el diagrama de radiación. Determina la distancia de observación en esfericas.

$$\psi(\theta, \phi) := \text{Egaussian}_x \left(F \cdot \sin \left(\frac{\theta \cdot \pi}{180} \right), \phi, F \cdot \cos \left(\frac{\theta \cdot \pi}{180} \right) \right)$$

$$\psi_0(\theta, \phi) := \text{Egaussian}_x0 \left(F \cdot \sin \left(\frac{\theta \cdot \pi}{180} \right), \phi, F \cdot \cos \left(\frac{\theta \cdot \pi}{180} \right) \right)$$

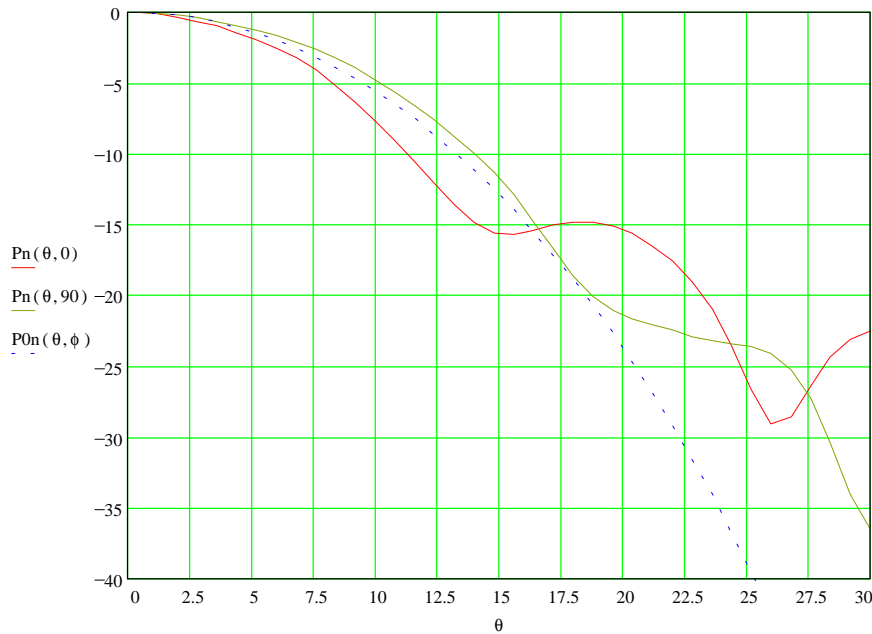
θ := -30, -29.2 .. 30

φ := 0

Corte en φ

$$P_{0n}(\theta, \phi) := 10 \cdot \log \left(\frac{\psi_0(\theta, \phi) \cdot \overline{\psi_0(\theta, \phi)}}{\psi_0(0, 0) \cdot \overline{\psi_0(0, 0)}} \right)$$

$$P_n(\theta, \phi) := 10 \cdot \log \left(\frac{\psi(\theta, \phi) \cdot \overline{\psi(\theta, \phi)}}{\psi(0, 0) \cdot \overline{\psi(0, 0)}} \right)$$



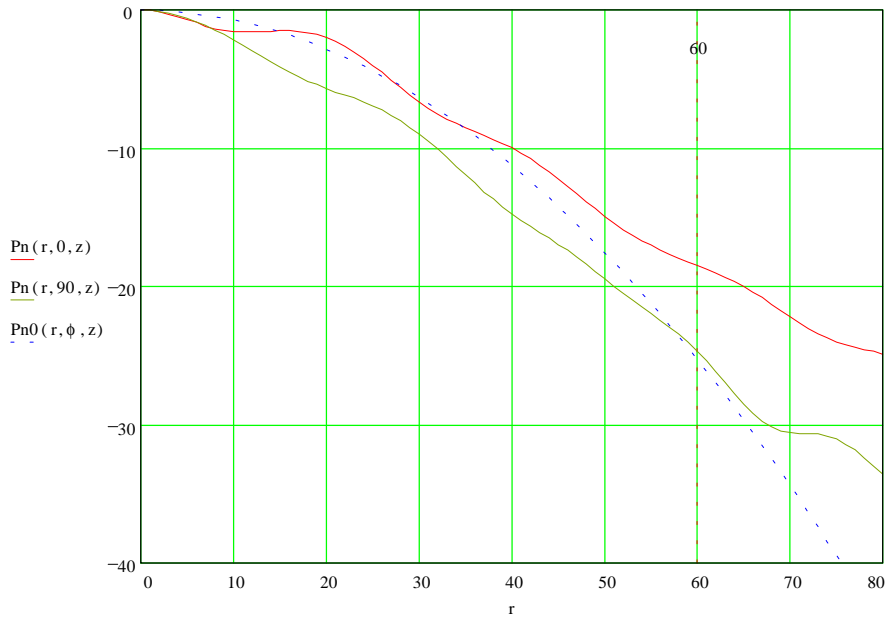
Este patrón es útil para comparar obtener el diagrama de nuestra bocina y poder compararlo con otros como el SABOR. Pero la verdadera utilidad del método está en poder calcular la distribución de energía en campo cercano

Informe Técnico nº 2001-1. Bocina Cónica de pruebas para el criostato de 22 GHz

z := 72.5 Distancia en mm
 ϕ := 0 Corte en ϕ
 r := 0, 1 .. 80 Podemos analizar el efecto de una apertura 4*waist

$$Pn0(r, \phi, z) := 10 \cdot \log \left(\frac{E_{\text{gaussian_x0}}(r, \phi, z) \cdot \overline{E_{\text{gaussian_x0}}(r, \phi, z)}}{E_{\text{gaussian_x0}}(0, \phi, z) \cdot \overline{E_{\text{gaussian_x0}}(0, \phi, z)}} \right)$$

$$Pn(r, \phi, z) := 10 \cdot \log \left(\frac{E_{\text{gaussian_x}}(r, \phi, z) \cdot \overline{E_{\text{gaussian_x}}(r, \phi, z)}}{E_{\text{gaussian_x}}(0, \phi, z) \cdot \overline{E_{\text{gaussian_x}}(0, \phi, z)}} \right)$$



Este tipo de diagramas en coordenadas cilíndricas nos ayuda a ver que pasa con las aperturas a través de las cuales tiene que pasar el haz.

Para el 22 GHz, con la bocina cónica:

r_window=60
 z_window=72.5

Vemos que tenemos unos niveles de Tapper bastante altos y que truncar el haz a dichos niveles puede tener serias consecuencias para el ruido del receptor.

Cálculo de Temperatura de antena

Integramos sobre una superficie a una distancia z donde suponemos que tenemos un plano que es nuestra región de interés a diferentes temperaturas. La temperatura medida por nuestra antena será aproximadamente.

R := 60 (16 p=0) y (20 p=2) con T0=185K dan Tantenna=79.841 z=72.5
 (16 p=0) y (20 p=2) con T0=185K dan Tantenna=78.724 z=57.5
 Tload := 77 (16 p=0) y (20 p=2) con T0=185K dan Tantenna=77.813 z=42.5
 T0 := 185
 sup := 150 Este es nuestro infinito numerico

$$A := \int_0^{360} \int_0^R (|E_{\text{gaussian_x}}(r, \phi, z)|)^2 \cdot r \, dr \, d\phi$$

$$B := \int_0^{360} \int_R^{\text{sup}} (|E_{\text{gaussian_x}}(r, \phi, z)|)^2 \cdot r \, dr \, d\phi$$

$$T_{\text{antenna}} := \frac{A \cdot T_{\text{load}} + B \cdot T_0}{(A + B)}$$

$$T_{\text{antenna}} = 79.841$$